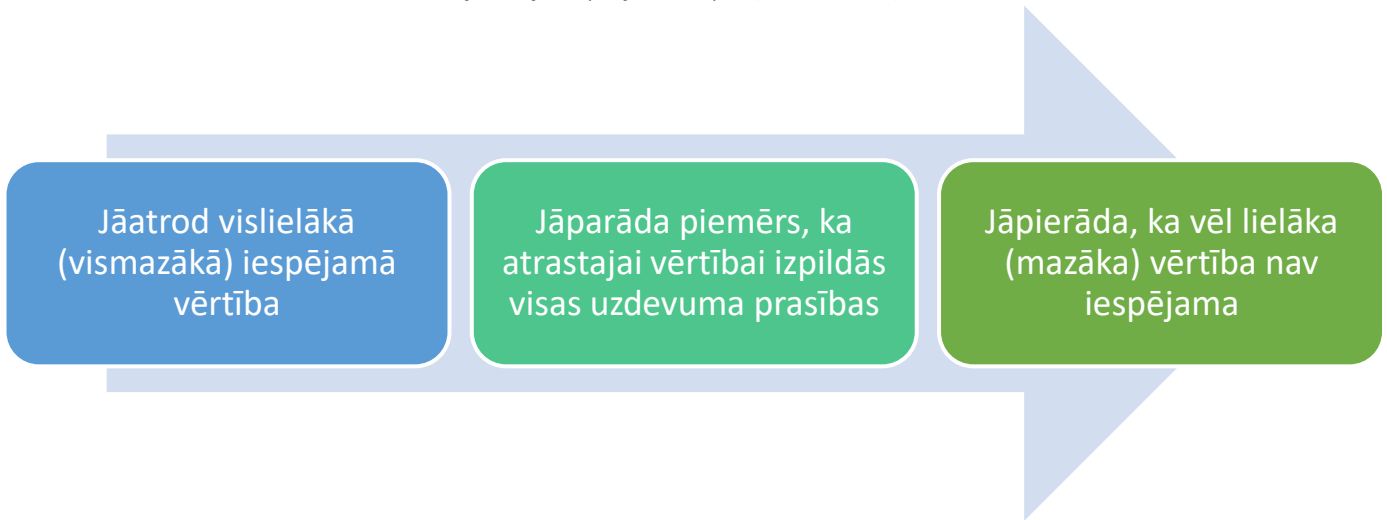


KĀDS IR LIELĀKAIS (MAZĀKAIS) ...?

Teorija un piemēri 5.-7. klasei, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2023./2024. m. g.

Ja uzdevuma jautājums sākas ar vārdiem "Kāds ir lielākais...?" vai "Kāds ir mazākais...?" vai arī prasīts atrast lielāko vai mazāko vērtību, tad uzdevuma atrisinājumā jāiekļauj trīs daļas (skat. 1. att.).



1. att.

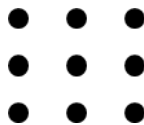
Tālāk doti dažī uzdevumu atrisinājumu piemēri, kuros uzsvērtas visas trīs nepieciešamās risinājuma daļas. Atrisinājumi nav noteikti jāizkārto tabulas formā, kā tas ir 1.-5. piemērā.

Uzdevumu piemēri

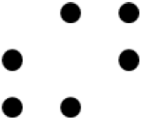
1. Kāds ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 vai 5?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav
Lielākais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir 98, jo tas dalās ar 2 ($98 = 2 \cdot 49$).	Lielākais divciparu skaitlis 99 neder, jo tas nedalās ne ar 2, ne ar 5.

2. Kāds mazākais skaits punktu no 2. att. dotajiem punktiem jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes?



2. att.

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka mazākas vērtības nav
Mazākais punktu skaits ir 3, piemēram, skat. 3. att. 	Katrā rindā ir jānodzēš vismaz viens punkts, tātad kopā ir jānodzēš vismaz 3 punkti.

3. att.

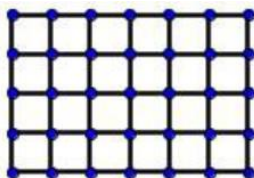
3. Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav
Lielākais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir 96, jo tas dalās ar 2, bet nedalās ar 7.	Apskatām divciparu skaitļus, sākot ar lielāko: <ul style="list-style-type: none"> ○ 99 neder, jo nedalās ne ar 2, ne ar 7; ○ 98 neder, jo tas dalās gan ar 2, gan ar 7 ($98 = 2 \cdot 49$); ○ 97 neder, jo nedalās ne ar 2, ne ar 7; ○ 96 der, jo tas dalās ar 2, bet nedalās ar 7 ($96 = 2 \cdot 48$).

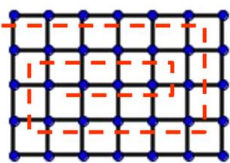
4. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav
Lielākā ciparu summa ir 60, šāda ciparu summa ir skaitlim 9999888, kas dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	Izmantosim šādus divus faktus: <ul style="list-style-type: none"> ○ lai skaitlim būtu pēc iespējas lielāka ciparu summa, tad tā cipariem jābūt pēc iespējas lielākiem; ○ lai skaitlis dalītos ar 8, tā pēdējo trīs ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 8. Skaitļa pirmie četri cipari būs 9 (tie neietekmē dalīšanos ar 8). Apskatām skaitļa pēdējos trīs ciparus, sākot ar šo ciparu lielāko iespējamo summu: <ul style="list-style-type: none"> ○ summa 27 – visi trīs cipari ir 9, bet skaitlis 999 nedalās ar 8 – neder; ○ summa 26 – ja ir divi devītnieki un viens astotnieks, tad var izveidot trīs trīsciparu skaitļus 899, 989, 998, bet neviens no tiem nedalās ar 8 – neder; ○ summa 25: <ul style="list-style-type: none"> ➢ cipari 9, 9, 7 – neder, jo neviens no skaitļiem 997, 979, 799 nedalās ar 8; ➢ cipari 9, 8, 8 – neder, jo neviens no skaitļiem 889, 898, 988 nedalās ar 8; ○ summa 24 – der skaitlis 888. Tātad uzdevuma nosacījumiem atbilst skaitlis 9999888.

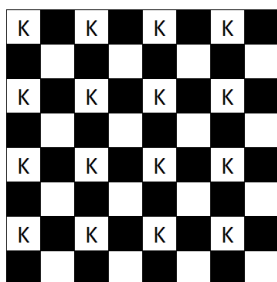
5. Dažas zvejošanas tīkla auklas drīkst pārgriezt (skat. 4. att.). Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās?



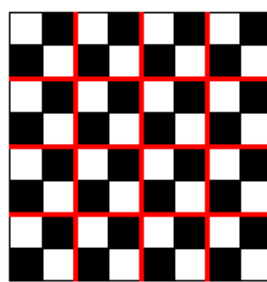
4. att.

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav
Lielākais skaits ir 24 griezieni, skat. 5. att.  <p style="text-align: center;">5. att.</p>	Tīklam ir 35 mezgli. Lai tīkls nesadalītos divās daļās, mazākais nepieciešamais skaits posmiņu starp mezgliem ir 34 (lai divi mezgli turētos kopā, vajag vismaz vienu auklu). Pavisam starp mezgliem ir $5 \cdot 6 = 30$ horizontāli un $7 \cdot 4 = 28$ vertikāli posmi, tātad kopā $30 + 28 = 58$ posmi. Tātad lielākais skaits griezienu ir $58 - 34 = 24$.

6. Kādu lielāko skaitu karaļu var uzlikt uz šaha galdiņa tā, lai neviena no karaļiem neapdraudētu nevienu citu karaļi?
Atrisinājums. Lielākais karaļu skaits ir 16, skat., piemēram, 6. att., kurā karaļu izvietojums apzīmēts ar burtu K. Pamatosim, ka nevar uzlikt 17 vai vairāk karaļus. Sadalām šaha galdiņu 16 kvadrātos ar izmēriem 2×2 (skat. 7. att.).



6. att.



7. att.

Ja uz šaha galdiņa uzliktu vairāk nekā 16 karaļus, tad pēc Dirihlē principa būtu vismaz viens tāds kvadrāts ar izmēriem 2×2 , kurā atrastos vismaz 2 karaļi, bet nav iespējams divus karaļus novietot kvadrātā ar izmēriem 2×2 tā, lai tie viens otru neapdraudētu.

7. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?

Atrisinājums. Mazākā ciparu summa ir 6, šāda ciparu summa ir skaitlim 1111110000 (tas dalās ar 3 un ar 11 pēc dalāmības pazīmēm).

Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11. Tātad skaitļa ciparu summai ir jādalās ar 3, tas ir, summa var būt 3, 6, 9 utt. Pierādīsim, ka nav iespējams iegūt ciparu summu 3.

Pastāv tikai 3 iespējas, kā iegūt ciparu summu 3:

- 1) skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles;
- 2) skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles;
- 3) skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

Pārbaudām, vai starpība starp nepāra vietās esošo ciparu summu n un pāra vietās esošo ciparu summu p dalās ar 11 (dalāmības pazīme ar 11):

- 1) starpība ir $3 - 0$, kas nedalās ar 11;
- 2) starpība ir $1 - 2$; $2 - 1$; $3 - 0$ vai $0 - 3$, kas nedalās ar 11;
- 3) starpība ir $(1 + 1 + 1) - 0$; $0 - (1 + 1 + 1)$; $(1 + 1) - 1$ vai $1 - (1 + 1)$, kas nedalās ar 11.

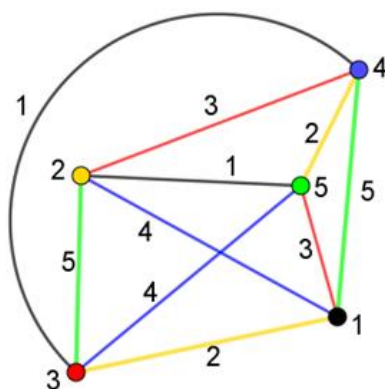
Tātad mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu naturālam skaitlim, kurš dalās ar 33, ir 6.

8. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā;
- neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.

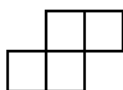
Kāda ir mazākā n vērtība?

Atrisinājums. Katru no piecām lampām attēlojam ar punktu un šķautne būs vītne, kas savieno divas lampas. Pie katras lampas piestiprinātas tieši 4 vītnes (katra no tām aiziet uz kādu no citām 4 lampām). Tātad, lai krāsojums atbilstu uzdevuma nosacījumiem, katrai no šīm vītņēm jābūt citā krāsā, kā arī lampai jābūt krāsā, kas nesakrīt ne ar vienu no šīm krāsām. Tātad krāsu skaitam jābūt vismaz $4 + 1 = 5$. Piemērs, ka krāsu skaits var būt 5, redzams 8. att., kur ar vienādiem cipariem atzīmētas vienādu krāsu lampas un vītnes. Tātad mazākā n vērtība ir 5.



8. att.

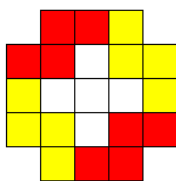
9. Kādu lielāko skaitu 9. att. doto figūru var izgriezt kvadrāta ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n = 5$; **b)** ja $n = 6$; **c)** ja $n = 7$. Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 9. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



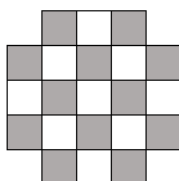
9. att.

Atrisinājums. a) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 4, piemēram, skat. 10. att.

Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāšosim doto figūru kā šaha galdiņa veidā (skat. 11. att.). Lai kā novietotu 9. att. doto figūru, tā vienmēr noklāj tieši divas baltas un tieši divas melnas rūtiņas (skat. 12. att.). Tā kā 11. att. figūra satur tieši deviņas baltas rūtiņas, tad no tās var izgriezt ne vairāk kā četras figūras, jo $9 : 2 = 4$, atl. 1.



10. att.

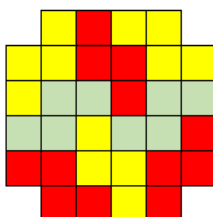


11. att.



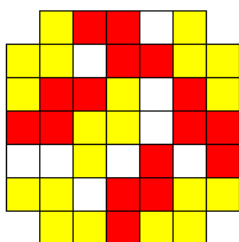
12. att.

b) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 8, piemēram, skat. 13. att.

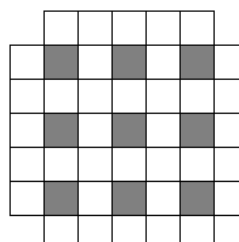


13. att.

c) Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9, piemēram, skat. 14. att. Iekrāsojam rūtiņas kā parādīts 15. att. Katra 9. att. dotā figūra pārklāj tieši vienu pelēko rūtiņu. Tā kā pelēko rūtiņu skaits ir 9, tad vairāk kā 9 figūras izgriezt nevar.



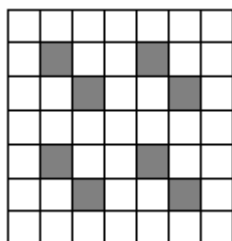
14. att.



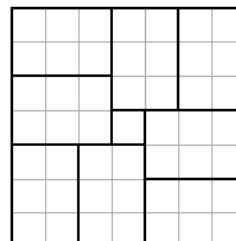
15. att.

10. Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso melnas, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt taisnstūri ar izmēriem 2×3 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir baltas?

Atrisinājums. Jāiekrāso 8 rūtiņas, skat., piemēram, 16. att. Nepietiek iekrāsot mazāk kā 8 rūtiņas, jo kvadrātā 7×7 rūtiņas var izvietot astoņus taisnstūrus ar izmēriem 2×3 rūtiņas (skat. 17. att.).



16. att.



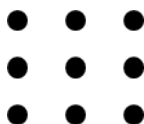
17. att.

Uzdevumi ar atrisinājuma struktūru

1. Kāds ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 vai 5?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav

2. Kāds mazākais skaits punktu no 18. att.2. att. dotajiem punktiem jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes?



18. att.

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka mazākas vērtības nav

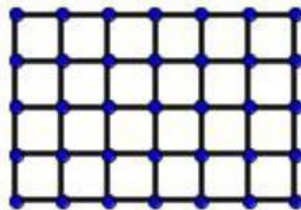
3. Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav

4. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav

5. Dažas zvejošanas tīkla auklas drīkst pārgriezt (skat. 19. att.). Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās?



19. att.

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav

6. Kādu lielāko skaitu karaļu var uzlikt uz šaha galda tā, lai neviens no karaļiem neapdraudētu nevienu citu karali?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav

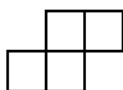
7. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka mazākas vērtības nav

8. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:
- nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā;
 - neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.
- Kāda ir mazākā n vērtība?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka mazākas vērtības nav

9. Kādu lielāko skaitu 20. att. doto figūru var izgriezt kvadrāta ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n = 5$; **b)** ja $n = 6$; **c)** ja $n = 7$. Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 20. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



20. att.

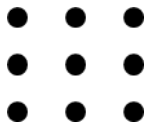
Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka lielākas vērtības nav
a)	
b)	
c)	

10. Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso melnas, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt taisnstūri ar izmēriem 2×3 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir baltas?

Atbilde un atbilstība nosacījumiem	Pamatojums, ka mazākas vērtības nav

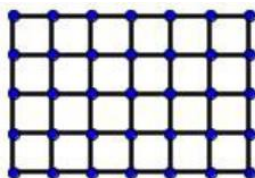
Uzdevumi

1. Kāds ir lielākais divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 vai 5?
2. Kāds mazākais skaits punktu no 21. att. dotajiem punktiem jānodzēš, lai nekādi trīs no atlikušajiem punktiem neatrastos uz vienas taisnes?



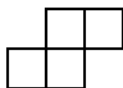
21. att.

3. Kurš no divciparu skaitļiem ir lielākais, kas dalās vai nu ar 2, vai 7?
4. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?
5. Dažas zvejošanas tīkla auklas drīkst pārgriezt (skat. 22. att.). Ar vienu griezienu drīkst pārgriezt vienu auklu, kas savieno divus blakus esošus mezglus. Kāds ir lielākais skaits griezienu, ko var izdarīt, nesadalot tīklu divās atsevišķās daļās?



22. att.

6. Kādu lielāko skaitu karaļu var uzlikt uz šaha galda tā, lai nevienam no karaļiem neapdraudētu nevienam citam karali?
7. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?
8. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:
 - nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā;
 - neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.Kāda ir mazākā n vērtība?
9. Kādu lielāko skaitu 23. att. doto figūru var izgriezt kvadrāta ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n = 5$; **b)** ja $n = 6$; **c)** ja $n = 7$. Griezumam līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 23. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



23. att.

10. Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso melnas, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt taisnstūri ar izmēriem 2×3 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir baltas?