Piemērs un pretpiemērs

Teorija un piemēri 5.-9. klasei, gatavojoties Novada olimpiādei 2021./2022. m. g.

Matemātikā ir noteikti kritēriji tam, kādi spriedumi ir un kādi spriedumi nav pieļaujami dažādu apgalvojumu pamatošanā. Lielākajai daļai uzdevumu risinājumu ir jāsatur vispārīgs pamatojums (nevis daži piemēri), kas garantē, ka mūsu atrastā atbilde tiešām ir pareiza (skat. Pielikumā). Taču daļa uzdevumu ir tādi, kuros pietiek parādīt tikai vienu piemēru, lai uzdevums būtu pilnībā atrisināts. Tālāk šajā materiālā doti dažādi piemēri, vingrinājumi un uzdevumi, lai trenētos atpazīt šo uzdevumu grupu, kuros pietiek parādīt tikai vienu piemēru.

Tā, piemēram, aplūkojam 1. att., kurā dotas divas sarunas.

1. att.

Lai gan abas sarunas ir par dzīvniekiem, varam ievērot ļoti būtisku atšķirību. Pirmais jautājums attiecas uz kādu VIENU dzīvnieku. Savukārt otrais jautājums ir par kādu dzīvnieku kopumu – proti, šis jautājums ir par pilnīgi VISIEM kaķiem.

Līdzīgi ir arī matemātikā – ir apgalvojumi (jautājumi), kas kaut ko apgalvo (jautā) par vienu objektu (skaitli, priekšmetu, figūru), un ir apgalvojumi, kas kaut ko apgalvo par kādu objektu kopu (skaitļiem, priekšmetiem, figūrām). Pirmos no tiem sauc par atsevišķiem apgalvojumiem, bet otros – par vispārīgiem.

Tā, piemēram, apgalvojums “skaitlis 14 dalās ar 2” ir atsevišķs apgalvojums, kas kaut ko apgavo tikai par vienu skaitli – par skaitli 14, bet apgalvojums “visi naturāli skaitļi, kuru pēdējais cipars ir 4, dalās ar 2” ir vispārīga apgalvojuma piemērs, kas kaut ko apgalvo par vairāk nekā vienu skaitli, proti, tas attiecas uz skaitļu kopu – uz visiem tādiem skaitļiem, kuriem pēdējais cipars ir 4.

Ievērosim vēl vienu ļoti būtisku lietu. Apskatot 1. att., varam pamanīt, ka uz pirmo jautājumu, kas kaut ko jautāja par vienu dzīvnieku, atbilde bija “jā” un pietika nosaukt vienu piemēru, vienu dzīvnieku, kam piemīt minētā īpašība (zīdītājs, kas dēj olas). Savukārt uz otru jautājumu, kas attiecas uz veselu objektu kopu (uz visiem kaķiem), atbilde bija “nē”, un pietika nosaukt vienu piemēru, vienu dzīvnieku, kam nepiemīt minētā īpašība (ir gara spalva), lai parādītu, ka šī īpašība nepiemīt visiem kaķiem.

Tas pats jāievēro arī risinot uzdevumus matemātikā. Proti, ja jautājums ir uzdots par kādu vienu objektu un atbilde ir “jā”, tad pietiek parādīt vienu piemēru, kam piemīt prasītās īpašības. Ja jautājums ir uzdots par kādu objektu kopu un atbilde ir “nē”, tad pietiek parādīt vienu piemēru, kam uzdevumā minētās īpašības nepiemīt. To sauc par pretpiemēru. Zemāk dots, kas būtu jāiekļauj uzdevuma risinājumā arī tādos gadījumos, ja atbildes ir citādas, bet to šoreiz sīkāk neaplūkosim.

Par to, ar kādiem vārdiem varētu sākties jautājums, kurā kaut kas prasīts par vienu objektu, un kas jāiekļauj šāda uzdevuma atrisinājumā, skat. 2. att.

Vai ir…? Vai eksistē…?
Vai iespējams…? Vai var gadīties…?

JĀ	NĒ
Pietiek parādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās	Nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem. Ar dažiem piemēriem nepietiek!

2. att.

Par to, ar kādiem vārdiem varētu sākties jautājums, kurā kaut kas prasīts par kādu objektu kopu, un kas jāiekļauj šāda uzdevuma atrisinājumā, skat. 3. att.

Vai visiem…? Vai katram…?
Vai noteikti…? Vai vienmēr…?

JĀ	NĒ
Nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem. Ar dažiem piemēriem nepietiek!	Pietiek parādīt vienu pretpiemēru.

3. att.

Vingrinājumi

Kāda atbilde – vai nu jā, vai nē – der katrā jautājumā un kurš no atbilžu variantiem katrā jautājumā der kā piemērs vai pretpiemērs? (Iespējamas vairākas pareizas atbildes.)

(Vingrinājumu atbildes skat. 5. lpp.)

1. Vai skaitļa kvadrāts noteikti ir lielāks nekā pats skaitlis?

a) 10 **b)** 1 **c)** $\frac{1}{2}$

2. Vai * vietā var ierakstīt kādu ciparu, lai skaitlis 12*3 dalītos ar 3?

a) 2 **b)** 1 **c)** 0

3. Vai eksistē tāds pirmskaitlis, kas dalās ar 3?

a) 6 **b)** 3 **c)** 0

4. Vai divu skaitļu summa noteikti ir lielāka nekā katrs no šiem diviem saskaitāmajiem?

a) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$ **b)** $0+5$ **c)** $2+1$

5. Vai visi skaitļi, kas dalās ar 5, dalās arī ar 10?

a) 50 **b)** 40 **c)** 25

6. Vai, reizinot divus pāra skaitļus, noteikti iegūst skaitli, kuram visi cipari ir pāra?

a) $8 \cdot 8$ **b)** $11 \cdot 8$ **c)** $12 \cdot 8$

7. Vai visi pirmskaitļi ir nepāra skaitļi?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2

8. Vai var atrast tādu divciparu skaitli, kuram desmitu cipars ir divas reizes lielāks nekā vienu cipars un kurš dalās ar 9?

a) 42 **b)** 63 **c)** 36

9. Vai x un y vietā var ierakstīt tādus naturālus skaitļus, lai vienādība $2 \cdot x + 3 \cdot y = 26$ ir patiesa?

a) $x = 7, y = 4$ **b)** $x = 4, y = 7$ **c)** $x = 5, y = 2$

10. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka ir patiesa vienādība $3 \cdot x + 5 \cdot y = 33$. Vai noteikti $x > 5$?

a) 11 **b)** 9 **c)** 1

11. Vai x un y vietā var ierakstīt pa vienam ciparam tā, lai skaitlis $\overline{12x3y}$ dalītos ar 6?

a) $x = 1$ un $y = 2$ **b)** $x = 0$ un $y = 6$ **c)** $\boldsymbol{x} = 5$ un $y = 6$

Uzdevumi

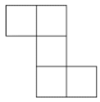
(Uzdevumu atrisinājumus un komentārus par uzdevumiem skat. 6. lpp.)

1. Vai ir iespējams uzzīmēt piecas taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?

2. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

3. Vai eksistē tādi divi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un $A+B$ ciparu summas ir vienādas?

4. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×10 rūtiņas var izgriezt 10 figūras, kādas redzamas 4. att.? Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.



4. att.

5. Vienā gadā bija tikpat trešdienu, cik piektdienu. Vai noteikti šajā gadā bija arī tikpat ceturtdienu?

6. Jānim kabatā ir 14 centi. Zināms, ka kabatā ir 5 monētas. Vai vienmēr ir iespējams šīs kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem?

7. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10. Pirmais no kreisās puses uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Vai noteikti šajā rindā var atrast tādu skaitli, kam kaimiņš pa kreisi ir mazāks nekā tā kaimiņš pa labi?

8. Katra no bumbiņām, kas atrodas kastē, nokrāsota vienā no trīs krāsām (sarkana, dzeltena, zaļa), un uz katras uzrakstīts vai nu skaitlis 1, vai 2, vai 3. Zināms, ka katra no trīs krāsām izmantota vismaz vienu reizi, tāpat arī katrs skaitlis no 1 līdz 3 uzrakstīts vismaz vienu reizi. Vai kastē noteikti varēs atrast trīs dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām būs rakstīti trīs dažādi skaitļi?

Vingrinājumu atbildes

Katrā jautājumā pasvītroti atslēgas vārdi, kas norāda, no kādām daļām ir jāsastāv uzdevuma atrisinājumam.

1. <u>Vai</u> skaitļa kvadrāts <u>noteikti</u> ir lielāks nekā pats skaitlis?

   a) 10 $\boxed{\textbf{b)}\ 1}$ $\boxed{\textbf{c)}\ \frac{1}{2}}$

   Nē. Kā pretpiemērs der gan 1, jo $1^2 = 1$, kas nav lielāks kā pats skaitlis 1, gan $\frac{1}{2}$, jo $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, kas nav lielāka kā $\frac{1}{2}$. (Taču pietiek parādīt tikai vienu piemēru.)

2. <u>Vai</u> * vietā <u>var</u> ierakstīt kādu ciparu, lai skaitlis 12*3 dalītos ar 3?

   a) 2 **b)** 1 $\boxed{\textbf{c)}\ 0}$

   Jā, piemēram, 0, tad iegūstam skaitli 1203, kura ciparu summa ir $1 + 2 + 0 + 3 = 6$, kas dalās ar 3, tātad arī pats skaitlis dalās ar 3.

3. <u>Vai eksistē</u> tāds pirmskaitlis, kas dalās ar 3?

   a) 6 $\boxed{\textbf{b)}\ 3}$ **c)** 0

   Jā, piemēram, 3, jo tas ir pirmskaitlis un tas dalās ar 3. (Šis ir vienīgais pirmskaitlis, kas dalās ar 3.)

4. <u>Vai</u> divu skaitļu summa <u>noteikti</u> ir lielāka nekā katrs no šiem diviem saskaitāmajiem?

   a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{b)}\ 0 + 5}$ **c)** $2 + 1$

   Nē. Kā pretpiemērs der $0 + 5 = 5$, jo šo divu skaitļu summa ir 5, kas nav lielāka kā katrs no saskaitāmajiem, jo 5 nav lielāks kā 5.

5. <u>Vai visi</u> skaitļi, kas dalās ar 5, dalās arī ar 10?

   a) 50 **b)** 40 $\boxed{\textbf{c)}\ 25}$

   Nē. Kā pretpiemērs der 25, jo tas dalās ar 5, bet ar 10 nedalās.

6. <u>Vai</u>, reizinot divus pāra skaitļus, <u>noteikti</u> iegūst skaitli, kuram visi cipari ir pāra?

   a) $8 \cdot 8$ **b)** $11 \cdot 8$ $\boxed{\textbf{c)}\ 12 \cdot 8}$

   Nē. Kā pretpiemērs der $12 \cdot 8 = 96$, kam viens cipars ir nepāra.

7. <u>Vai visi</u> pirmskaitļi ir nepāra skaitļi?

   a) 4 **b)** 3 $\boxed{\textbf{c)}\ 2}$

   Nē. Kā pretpiemērs der 2, kas ir vienīgais pāra pirmskaitlis.

8. <u>Vai var</u> atrast tādu divciparu skaitli, kuram desmitu cipars ir divas reizes lielāks nekā vienu cipars un kurš dalās ar 9?

   a) 42 $\boxed{\textbf{b)}\ 63}$ **c)** 36

   Jā, piemēram, 63, jo tā pirmais cipars ir divas reizes lielāks nekā pēdējais un $63 : 9 = 7$.

9. <u>Vai</u> x un y vietā <u>var</u> ierakstīt naturālus skaitļus, lai vienādība $2 \cdot x + 3 \cdot y = 26$ ir patiesa?

   $\boxed{\textbf{a)}\ x = 7, y = 4}$ **b)** $x = 4, y = 7$ **c)** $x = 5, y = 2$

   Jā, piemēram, $x = 7, y = 4$, jo $2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 14 + 12 = 26$.

10. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka ir patiesa vienādība $3 \cdot x + 5 \cdot y = 33$. <u>Vai noteikti</u> $x > 5$?

    a) 11 **b)** 9 $\boxed{\textbf{c)}\ 1}$

    Nē. Kā pretpiemērs der $x = 1$, jo tad, izvēloties $y = 6$, varam iegūt patiesu vienādību $3 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 3 + 30 = 33$.

11. Vai x un y vietā var ierakstīt pa vienam ciparam tā, lai skaitlis $\overline{12x3y}$ dalītos ar 6?

$\boxed{\textbf{a)}\ x = 1 \text{ un } y = 2}$ $\boxed{\textbf{b)}\ x = 0 \text{ un } y = 6}$ **c)** $x = 5$ un $y = 6$

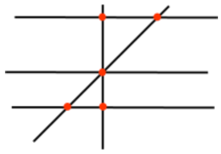
Jā. Kā piemēri der gan $x = 1$ un $y = 2$, jo $12132 : 6 = 2022$, gan $x = 0$ un $y = 6$, jo $12036 : 6 = 2006$. (Taču pietiek parādīt tikai vienu piemēru.)

Uzdevumu atrisinājumi

1. Vai ir iespējams uzzīmēt piecas taisnes, kurām ir tieši 5 krustpunkti?

Ievēro! Šajā uzdevumā kaut kas tiek prasīts par vienu gadījumu – par vienu piecu taišņu izkārtojumu. Tātad, ja atbilde ir "jā", tad pietiek parādīt vienu derīgu piemēru. (Ja atbilde būtu "nē", tad gan būtu vajadzīgs vispārīgs pierādījums tam, ka taisnes nekādā veidā nevarēs atbilstoši izkārtot.)

Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 5. att.



5. att.

2. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "noteikti" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis par kaut kādu vienu vai dažiem) tādiem deviņciparu skaitļiem, kuru pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari. Tas nozīmē, ja uzdevumā minētā īpašība (dalās ar 3) nepiemīt kādam no šiem skaitļiem, tad mēs nevaram apgalvot, ka pilnīgi visiem tādiem skaitļiem tā ir spēkā, proti, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu tādu piemēru (pretpiemēru), kuram minētā īpašība (dalās ar 3) neizpildās.

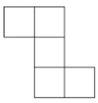
Atrisinājums. Nē, piemēram, 123456790 nedalās ar 3, jo tā ciparu summa $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 = 37$ nedalās ar 3.

3. Vai eksistē tādi divi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un $A + B$ ciparu summas ir vienādas?

Ievēro! Šajā uzdevumā kaut kas tiek prasīts par vienu gadījumu – par to, vai var atrast divus tādus skaitļus, kam izpildās minētās īpašības. Tātad, ja atbilde ir "jā", tad pietiek parādīt vienu piemēru. (Ja atbilde būtu "nē", tad gan būtu nepieciešams vispārīgs pierādījums (nevis daži piemēri), ka šādus divus skaitļus nekādā gadījumā nebūs iespējams atrast.)

Atrisinājums. Jā, piemēram, var izvēlēties $A = 900$ un $B = 333$, tad $A + B = 900 + 333 = 1233$, un ciparu summa visiem trim skaitļiem 900, 333 un 1233 ir 9.

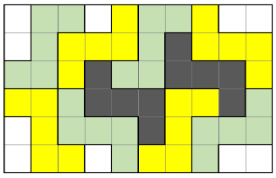
4. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×10 rūtiņas var izgriezt 10 figūras, kādas redzamas 6. att.? Figūras var būt pagrieztas vai apgāztas otrādi.



6. att.

Ievēro! Šajā uzdevumā kaut kas tiek prasīts par vienu gadījumu – par to, vai pastāv kaut viens piemērs, kā no dotā taisnstūra izgriezt 10 figūras. Tātad, ja atbilde ir, "jā", tad jāparāda šis viens piemērs.

Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 7. att.



7. att.

5. Vienā gadā bija tikpat trešdienu, cik piektdienu. Vai noteikti šajā gadā bija arī tikpat ceturtdienu?

Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "noteikti" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis par kaut kādu vienu vai dažiem) tādiem gadiem, kuros trešdienu ir tikpat, cik piektdienu. Tātad, ja var atrast kaut vienu tādu piemēru (pretpiemēru), kuram prasītais (arī ceturtdienu ir tikpat) neizpildās, tad nevaram apgalvot, ka prasītais izpildās visos tādos gadījumos. Proti, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru.

Atrisinājums. Nē, ne obligāti. Īsajā gadā ir 365 dienas jeb 52 pilnas nedēļas un viena diena. Ja 1. janvāris ir ceturtdiena, tad arī 31. decembris ir ceturtdiena un ceturtdienu skaits gada laikā būs par vienu lielāks nekā trešdienu un piektdienu skaits.

6. Jānim kabatā ir 14 centi. Zināms, ka kabatā ir 5 monētas. Vai vienmēr ir iespējams šīs kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem?

Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "vienmēr" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem tādiem gadījumiem, kad kabatā ir 5 monētas, kuru vērtība ir 14 centi. Tātad, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru.

Atrisinājums. Nē, vienmēr nav iespējams sadalīt divās kaudzītēs tā, lai katrā kaudzītē būtu pa 7 centiem, jo var gadīties, ka kabatā ir viena 10 centu monēta un četras viena centa monētas.

7. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10. Pirmais no kreisās puses uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Vai noteikti šajā rindā var atrast tādu skaitli, kam kaimiņš pa kreisi ir mazāks nekā tā kaimiņš pa labi?

Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "noteikti" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis vienu vai dažiem) tādiem gadījumiem – pirmo desmit naturālo skaitļu izkārtojumiem – kad pirmais uzrakstītais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais uzrakstītais skaitlis. Tātad, ja atbilde ir "nē", tad pietiek parādīt vienu pretpiemēru – piemēru, kurā pirmais skaitlis ir mazāks nekā pēdējais, bet visiem pārējiem skaitļiem izpildās, ka kaimiņš pa kreisi ir lielāks nekā kaimiņš pa labi.

Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Piemēram, skaitļi var būt uzrakstīti šādi: 5; 10; 4; 9; 3; 8; 2; 7; 1; 6. Redzam, ka katram skaitlim kaimiņš pa kreisi ir lielāks nekā tā kaimiņš pa labi.

8. Katra no bumbiņām, kas atrodas kastē, nokrāsota vienā no trīs krāsām (sarkana, dzeltena, zaļa), un uz katras uzrakstīts vai nu skaitlis 1, vai 2, vai 3. Zināms, ka katra no trīs krāsām izmantota vismaz vienu reizi, tāpat arī katrs skaitlis no 1 līdz 3 uzrakstīts vismaz vienu reizi. Vai kastē noteikti varēs atrast trīs dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām būs rakstīti trīs dažādi skaitļi?

Ievēro! Šajā uzdevumā vārds "noteikti" nozīmē, ka jautājums uzdots par pilnīgi visiem (nevis vienu vai dažiem) tādiem gadījumiem, kad katra bumbiņa nokrāsota vienā no trīs krāsām un uz tās uzrakstīts viens no trīs skaitļiem. Turklāt jāņem vērā, ka nav zināms, cik kastē ir bumbiņu. Tātad, ja atbilde ir "nē", pietiek parādīt vienu pretpiemēru, kurā prasītais neizpildās – ir jāapraksta, kā var būt nokrāsotas bumbiņas un kādi skaitļi var būt uzrakstīti uz katras krāsas bumbiņām, lai nebūtu iespējams atrast trīs dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām uzrakstīti trīs dažādi skaitļi.

Atrisinājums. Nē, piemēram, skaitlis 1 varētu būt uzrakstīts tikai uz dzeltenām un zaļām bumbiņām, bet skaitļi 2 un 3 – tikai uz sarkanām bumbiņām (skat. 8. att.), tātad šajā gadījumā lai kuras trīs bumbiņas ar skaitļiem 1, 2 un 3 mēs izvēlētos, tās būs tikai divās dažādās krāsās.

8. att.

Pielikums

Uzdevumu veidi un to atrisinājumu struktūra

Atkarībā no tā, kāda tipa jautājums uzdevumā ir uzdots, uzdevuma risinājumam jāsastāv no šim jautājumam atbilstošām daļām. Tālāk dots biežāk sastopamo uzdevumu veidu iedalījums pēc uzdotā jautājuma un norādīts, kas jāiekļauj šādu uzdevumu atrisinājumos.

Kāds var būt...? Cik...? Atrisini!	Kāds ir lielākais (mazākais)...?
Jāatrod VISAS iespējamās vērtības	Jāatrod lielākā (mazākā) iespējamā vērtība, jāparāda piemērs
Jāpierāda, ka citu iespēju nav	Jāpierāda, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nav iespējama

Vai iespējams...? Vai eksistē...?		Vai katram...? Vai visiem...? Vai noteikti...?	
JĀ	NĒ	JĀ	NĒ
Pietiek parādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības izpildās	Nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem	Nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem	Pietiek parādīt vienu pretpiemēru