Rekurentas virknes

Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2018. gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Atklātajā matemātikas olimpiādē viens uzdevums 9.-12. klasei būs par tēmu "Rekurentas virknes".

Viens no virkņu uzdošanas veidiem ir definēt to rekurenti, tas ir, norādot virknes pirmo locekli vai dažus pirmos locekļus (sākuma nosacījumus) un formulu, ar kuras palīdzību jebkuru virknes locekli var iegūt no iepriekšējā vai dažiem iepriekšējiem virknes locekļiem. Vienkāršākie šādu rekurentu virkņu piemēri ir aritmētiskā progresija ($a_{n+1} = a_n + d$) un ģeometriskā progresija ($b_{n+1} = b_n \cdot q$).

Cits tipisks un labi pazīstams rekurentas virknes piemērs ir Fibonači skaitļu virkne F_n, kuru definē ar sakarībām $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, tas ir, virknes pirmie divi locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir iegūstams kā divu iepriekšējo locekļu summa. Aprēķinot arī nākamos virknes locekļus, iegūstam virkni

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; …

No otras puses, lai aprēķinātu šādā veidā definētas virknes, teiksim, 2018. locekli, būtu vispirms jāaprēķina visi iepriekšējie virknes locekļi. Tādēļ reizēm ir izdevīgi rekurenti definētai virknei atrast vispārīgā locekļa formulu, kas būtu atkarīga tikai no locekļa kārtas numura. Reizēm tas ir vienkārši (piemēram, ja virkne ir rekurenti definēta ar $a_1 = 2$ un $a_n = 2a_{n-1}$, tad virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2^n$), reizēm – kā Fibonači virknes gadījumā – tas ir grūtāk, taču iespējami.

Ir uzdevumi, kurus iespējams atrisināt, ja izdodas parādīt, ka uzdevuma atbilde ir rekurentas virknes loceklis, turklāt šai virknei var atrast gan rekurences sakarību, gan sākuma nosacījumus. Bieži vien tie ir uzdevumi, kuros tiek prasīts noteikt kādu objektu skaitu, kas atkarīgi no parametra n, turklāt

- ir iespējams parādīt, kā šos objektus var iegūt no tāda paša veida objektiem, taču ar mazāku parametra n vērtību;
- ja parametra n vērtība ir maza (piemēram, $n = 0$, $n = 1$ vai $n = 2$), tad ir viegli saskaitīt vajadzīgā veida objektus.

Dažkārt uzdevumos ir izdevīgi apskatāmo problēmu sadalīt vairākās "apakšproblēmās", tas ir, meklējamos objektus sadalīt vairākos tipos tā, lai viena tipa objektu skaitu būtu viegli aprakstīt ar rekurences sakarībām. (Skat., piemēram, 5. uzd.)

Uzdevumu piemēri

1. Cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summu var izteikt skaitli **a)** 14; **b)** 22? Veidi, kas atšķiras ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 8 var izteikt četros dažādos veidos: $8 = 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 3 = 3 + 2 + 3 = 3 + 3 + 2$.

Atrisinājums. Protams, varētu mēģināt uzrakstīt visas iespējamā skaitļa 14 izteiksmes ar divnieku un trijnieku summu, un pēc tam saskaitīt, cik tādu izteiksmju ir. Tomēr tam vajadzētu daudz laika, un būtu ļoti jāuzmanās, lai kāda no iespējām nepaliktu nepamanīta. Tāpēc rīkosimies citādi: mēģināsim pakāpeniski noskaidrot, cik dažādos veidos kā divnieku un trijnieku summa izsakāmi skaitļi 2, 3, 4,…, un centīsimies ieraudzīt iegūto rezultātu veidošanās principu.

Skaitlis	Skaitļa izteikšana ar divniekiem un trijniekiem	Dažādo veidu skaits
2	$2 = 2$	1
3	$3 = 3$	1
4	$4 = 2 + 2$	1
5	$5 = 2 + 3$ $5 = 3 + 2$	2
6	$6 = 3 + 3$ $6 = \mathbf{4} + 2 = \mathbf{2 + 2} + 2$	$1 + 1 = 2$

7	$7 = \mathbf{4} + 3 = \mathbf{2} + \mathbf{2} + 3$ $7 = \mathbf{5} + 2 = \mathbf{2} + \mathbf{3} + 2 =$ $= \mathbf{3} + \mathbf{2} + 2$	$1 + 2 = 3$
8	$8 = \mathbf{5} + 3 = \mathbf{2} + \mathbf{3} + 3 =$ $= \mathbf{3} + \mathbf{2} + 3$ $8 = \mathbf{6} + 2 = \mathbf{3} + \mathbf{3} + 2 =$ $= \underline{\mathbf{4}} + \mathbf{2} + 2 = \underline{\mathbf{2} + \mathbf{2}} + \mathbf{2} + 2$	$2 + 2 = 4$
...	...	...

Ar a_n apzīmēja, cik dažādos veidos skaitli n var izteikt kā divnieku un trijnieku summu. Iegūstam tabulu:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	...

Pamatosim, ka šīs tabulas apakšējā rindā katrs skaitlis, sākot ar ceturto, ir to divu skaitļu summa, kas atrodas divas un trīs pozīcijas pirms tā, tas ir, to var uzrakstīt ar rekurences formulu $a_n = a_{n-3} + a_{n-2}$, kur $n \geq 5$.

Skaitli n var uzrakstīt kā divnieku un trijnieku summu a_n dažādos veidos. Iespējami divi dažādi gadījumi.

- Ja pēdējais saskaitāmais ir 3, tad katrai summai pārējo saskaitāmo summa (bez pēdējā trijnieka) ir $(n-3)$, un šādu summu skaits ir a_{n-3}.
- Ja pēdējais saskaitāmais ir 2, tad katrai summai pārējo saskaitāmo summa (bez pēdējā divnieka) ir $(n-2)$, un šādu summu skaits ir a_{n-2}.

Tā kā katra summa atšķiras no katras citas summas ar pēdējo saskaitāmo, tad formula $a_n = a_{n-3} + a_{n-2}$ ir patiesa. Tagad, izmantojot iegūto rekurences formulu, aizpildām tabulu:

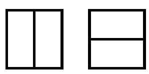
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
a_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151	200	...

Tātad **a)** skaitli 14 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt 21 veidā; **b)** skaitli 22 kā divnieku un trijnieku summu var izteikt 200 veidos.

2. Cik dažādos veidos taisnstūri 2×12 var sagriezt taisnstūros 1×2? (Griezumi, kas iegūstami viens no otra ar simetriju vai pagriezienu, tiek uzskatīti par dažādiem.)

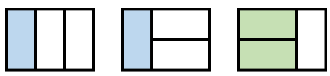
Atrisinājums. Mēģināsim pakāpeniski noskaidrot, cik dažādos veidos var sagriezt taisnstūri 2×2, 2×3, 2×4 un 2×5. Sāksim taisnstūra griešanu no kreisās malas.

Taisnstūri 2×2 var sagriezt 2 dažādos veidos – griežot vertikāli vai horizontāli (skat. 1. att.).



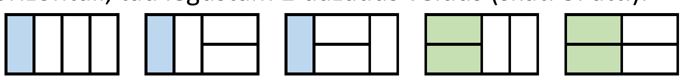
1. att.

Taisnstūri 2×3 var sagriezt $3 = 2 + 1$ dažādos veidos – pirmo griezienu var izdarīt vertikāli, tad iegūstam 2 dažādus veidus, vai horizontāli, tad iegūstam 1 veidu (skat. 2. att.).



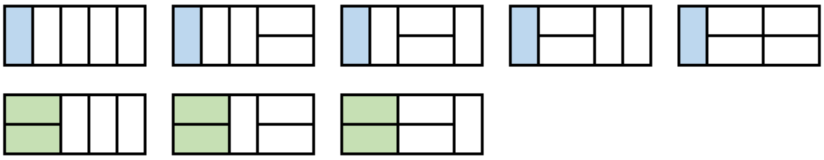
2. att.

Taisnstūri 2×4 var sagriezt $5 = 3 + 2$ dažādos veidos – pirmo griezienu var izdarīt vertikāli, tad iegūstam 3 dažādus veidus, vai horizontāli, tad iegūstam 2 dažādus veidus (skat. 3. att.).



3. att.

Taisnstūri 2×5 var sagriezt $8 = 5 + 3$ dažādos veidos – pirmo griezienu var izdarīt vertikāli, tad iegūstam 5 dažādus veidus, vai horizontāli, tad iegūstam 3 dažādus veidus (skat. 4. att.).



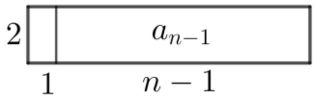
4. att.

Ievērojam,

- ja pirmo griezienu izdara vertikāli, tad vēl jāsagriež taisnstūris, kura garums ir par 1 mazāks nekā dotajam taisnstūrim;
- ja pirmo griezienu izdara horizontāli, tad noteikti arī jānogriež otrs horizontālais taisnstūris 1×2, līdz ar to vēl jāsagriež taisnstūris, kura garums ir par 2 mazāks nekā dotajam taisnstūrim.

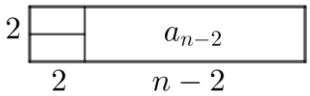
Ar a_n apzīmējam dažādo veidu skaitu, kā var sagriezt taisnstūri $2 \times n$. Apskatām, kādā veidā no taisnstūra $2 \times n$ var nogriezt pirmo taisnstūri 1×2:

- ja pirmo griezienu izdara vertikāli (skat. 5. att.), tad pirmā kolonna ir nosegta un atliek sagriezt taisnstūri $2 \times (n-1)$, ko var izdarīt a_{n-1} veidos;



5. att.

- ja pirmo griezienu izdara horizontāli, tad arī otrs grieziens ir jāveic horizontāli (skat. 6. att.) un atliek sagriezt taisnstūri $2 \times (n-2)$, ko var izdarīt a_{n-2} veidos.



6. att.

Līdz ar to iegūstam, ka $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Izmantojot šo sakarību un atrastās sākuma vērtības $a_1 = 1$ un $a_2 = 2$, aprēķinām a_{12}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Tātad taisnstūri 2×12 var sagriezt 233 dažādos veidos.

3. No mājām līdz ieejai dzīvoklī ir 12 pakāpieni. Ar vienu soli var pārkāpt 1; 2 vai 3 pakāpienus. Cik dienas var kāpt atšķirīgos veidos? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto soļu secība, piemēram, kāpt 2; 3; 1 pakāpienus un kāpt 1; 2; 3 pakāpienus ir divi atšķirīgi veidi.)

Atrisinājums. Ar a_n apzīmējam, cik dažādos veidos var nokļūt uz n-tā pakāpiena. Iespējami trīs atšķirīgi gadījumi:

- uz n-tā pakāpiena ar vienu soli var nokļūt no $(n-1)$-ā pakāpiena, uz kura var nokļūt a_{n-1} veidos;
- uz n-tā pakāpiena ar vienu soli var nokļūt no $(n-2)$-ā pakāpiena, uz kura var nokļūt a_{n-2} veidos;
- uz n-tā pakāpiena ar vienu soli var nokļūt no $(n-3)$-ā pakāpiena, uz kura var nokļūt a_{n-3} veidos.

Citu variantu, kā ar vienu soli nokļūt uz n-tā pakāpiena, nav. Tātad uz n-tā pakāpiena pavisam var nokļūt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ atšķirīgos veidos. Izmantojot šo sakarību un sākuma vērtības $a_1 = 1$ un $a_2 = 2$, aprēķinām a_{12}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927

Līdz ar to atšķirīgos veidos var kāpt 927 dienas.

4. Rindā salikti 10 krēsli, uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēniem vienu reizi atļauts piecelties un apsēsties citā secībā, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu uz tā paša krēsla, vai uz cita krēsla tieši blakus šim krēslam. Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārsēšanās?

Atrisinājums. Ar a_n apzīmējam dažādos iespējamos n skolēnu izvietojumus pēc pārsēšanās. Ievērojam, ka $a_1 = 1$ (skolēns pieceļas un pēc tam atkal apsēžas savā vietā) un $a_2 = 2$ (abi skolēni pieceļas un pēc tam katrs apsēžas savā vietā vai arī abi skolēni apmainās vietām).

Apskatām n skolēnus un meklējam formulu, kas izsaka a_n . Visas pārsēšanās iedalās divās grupās.

- Pirmais skolēns paliek uz vietas. Tad pārsēžas tikai atlikušie $(n-1)$ skolēni un šādu dažādo izvietojumu skaits ir a_{n-1}.
- Pirmais skolēns pāriet uz otro krēslu. Tad uz pirmo krēslu pāriet skolēns no otrā krēsla. Pārējie $(n-2)$ skolēni pārsēžas "savā starpā" un šādu dažādo izvietojumu skaits ir a_{n-2}.

Tātad $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Izmantojot sākuma nosacījumus un iegūto formulu, iegūstam

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Līdz ar to iespējami 89 dažādi skolēnu izvietojumi.

5. Apskatām skaitļus, kas satur tikai ciparus 1; 2; 3 un kuros cipari 1 un 3 neatrodas blakus. Cik ir desmitciparu skaitļu, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem?

Atrisinājums. Apskatīsim trīs rekurentas skaitļu virknes. Apzīmējam

- v_n – meklēto n-ciparu skaitļu skaits, kuru pēdējais cipars ir 1;
- d_n – meklēto n-ciparu skaitļu skaits, kuru pēdējais cipars ir 2;
- t_n – meklēto n-ciparu skaitļu skaits, kuru pēdējais cipars ir 3.

Ievērojam, ka

- $v_1 = d_1 = t_1 = 1$ (atbilstošie viencipara skaitļi ir 1; 2; 3);
- $v_n = v_{n-1} + d_{n-1}$, jo n-ciparu skaitļus, kam pēdējais cipars ir 1, var iegūt no $(n-1)$-ciparu skaitļiem, kam pēdējais cipars ir 1 vai 2, tiem beigās pierakstot 1;
- $d_n = v_{n-1} + d_{n-1} + t_{n-1}$, jo n-ciparu skaitļus, kam pēdējais cipars ir 2, var iegūt no $(n-1)$-ciparu skaitļiem, kam pēdējais cipars ir 1; 2 vai 3, tiem beigās pierakstot 2;
- $t_n = d_{n-1} + t_{n-1}$, jo n-ciparu skaitļus, kam pēdējais cipars ir 3, var iegūt no $(n-1)$-ciparu skaitļiem, kam pēdējais cipars ir 2 vai 3, tiem beigās pierakstot 3;

Tātad meklēto n-ciparu skaitļu skaits ir

$$v_n + d_n + t_n = 2(v_{n-1} + d_{n-1} + t_{n-1}) + d_{n-1}. \qquad (1)$$

Tā kā $d_n = v_{n-1} + d_{n-1} + t_{n-1}$, tad

$$d_{n-1} = v_{n-2} + d_{n-2} + t_{n-2}. \qquad (2)$$

Ja meklēto n-ciparu skaitļu skaitu apzīmē ar a_n, tad no (1) un (2) iegūstam $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

Tā kā $a_1 = 3$ (derīgie viencipara skaitļi ir 1; 2; 3) un $a_2 = 7$ (derīgie divciparu skaitļi ir 11; 12; 21; 22; 23; 32; 33), tad, izmantojot iegūto formulu, iegūstam, ka pavisam ir 8119 desmitciparu skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119

Literatūra

- Neklātienes nodarbības vidusskolēniem (teorija)
  http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/NOD4.pdf
- Neklātienes nodarbības vidusskolēniem (uzdevumi)
  http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/NNV_4nod_uzdevumi.pdf
- Neklātienes nodarbības vidusskolēniem (atrisinājumi)
  http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/03/NNV_4nod_atrisinajumi.pdf