VIENĀDOJUMI VESELOS SKAITĻOS

Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2016. gadā

Ieteicams arī izskatīt teorijas materiālu, kas tika publicēts, gatavojoties Novada olimpiādei: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2015/12/teorija_Skaitludalamiba_Kongruences.pdf

Dažreiz, lai pamatotu, ka nav iespējams atrast tādus skaitļus, kam izpildās uzdevumā prasītās īpašības, ir izdevīgi izmantot dalāmības īpašības.

Atceries! Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a *dalās* ar b (apzīmē $a \,\vdots\, b$). Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.
Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības īpašības (Visi tālāk minētie skaitļi ir veseli.)

- Ja katrs no vairākiem saskaitāmajiem dalās ar n, tad to visu summa dalās ar n.
  Piemēram, $123456 + 7890 + 20152016$ dalās ar 2, jo katrs saskaitāmais dalās ar 2.
- Ja divi skaitļi dalās ar n, tad arī to starpība dalās ar n.
  Piemēram, tā kā 201420152016 un 2142020 dalās ar 4, tad ar 4 dalās arī $201420152016 - 2142020$.
- Ja kaut viens no vairākiem naturāliem skaitļiem dalās ar n, tad to visu reizinājums dalās ar n.
  Piemēram, $2014 \cdot 2015 \cdot 2016$ dalās ar 5, jo 2015 dalās ar 5.
- Ja vairāku skaitļu summa un visi skaitļi, izņemot vienu, dalās ar n, tad arī šis pēdējais skaitlis dalās ar n.
  Piemēram, ja $x + 40 + 50 = 120$, tad, tā kā 40, 50 un 120 dalās ar 10, arī x dalās ar 10.

Uzdevumos izmantosim ideju:

ja vienādības labā puse dalās ar n, tad arī vienādības kreisajai pusei jādalās ar n (un otrādi).

Atceries! Naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...; veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

1. piemērs
Vai var atrast tādus naturālus skaitļus x un y, ka $6 \cdot x + 16 \cdot y = 2015$?
Atrisinājums
Ievērojam, ka dotā vienādojuma kreisās puses izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis (dalās ar 2), bet labajā pusē ir nepāra skaitlis (nedalās ar 2). Tā kā pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli, tad nevar atrast tādus naturālus skaitļus x un y , lai dotā vienādība būtu patiesa.

2. piemērs
Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y, ka **a)** $12 \cdot x - 8 \cdot y = 2$; **b)** $11 \cdot x - 7 \cdot y = 2$?
Atrisinājums
a) Nē, nevar atrast. Gan 12, gan 8 dalās ar 4, tātad arī $12 \cdot x$ un $8 \cdot y$ dalās ar 4, kā arī to starpība dalās ar 4. Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar 4, tad ar 4 ir jādalās arī vienādības labajai pusei, taču skaitlis 2 ar 4 nedalās.
b) Jā, piemēram, der $x = 4$ un $y = 6$, jo $11 \cdot 4 - 7 \cdot 6 = 44 - 42 = 2$.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir

- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

3. piemērs

Pa sienu rāpo mušas un zirnekļi. Cik mušas un cik zirnekļi rāpo pa šo sienu, ja pavisam kopā ir 80 kājas?

Atrisinājums

Mušai ir sešas kājas, bet zirneklim ir astoņas kājas. Mušu skaitu uz sienas apzīmēsim ar m, bet zirnekļu skaitu – ar z. Tad no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$ jeb $3 \cdot m + 4 \cdot z = 40$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 4, tad arī vienādojuma kreisai pusei jādalās ar 4, bet tas nozīmē, ka m dalās ar 4. Tā kā uzdevumā teikts, ka pa sienu rāpo gan mušas, gan zirnekļi, tad $m > 0$, un tā kā kopā ir ne vairāk kā 80 kājas, tad $m < 14$. Tātad m var pieņemt trīs dažādas vērtības:

- Ja $m = 4$, tad $6 \cdot 4 + 8 \cdot z = 80$, no kurienes iegūst, ka $z = 7$;
- ja $m = 8$, tad $6 \cdot 8 + 8 \cdot z = 80$, no kurienes iegūst, ka $z = 4$;
- ja $m = 12$, tad $6 \cdot 12 + 8 \cdot z = 80$, no kurienes iegūst, ka $z = 1$.

Līdz ar to pa sienu rāpo vai nu 7 zirnekļi un 4 mušas, vai 4 zirnekļi un 8 mušas, vai 1 zirneklis un 12 mušas.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izteiksmē $6 \cdot m + 8 \cdot z = 80$ ievietojot visas z vērtības no 1 līdz 10 (ja z ir lielāks nekā 10, tad sanāktu, ka kopā ir vairāk nekā 80 kājas) un pārbaudot, kuros gadījumos m ir vesels skaitlis.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds var būt...? ”; „Cik...? ”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1. jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
2. jāpamato, ka citu vērtību nav.

4. piemērs

Kādus naturālus skaitļus var ievietot x un y vietā, lai iegūtu patiesu vienādību $5 \cdot x + 2 \cdot y = 30$?

Atrisinājums

Doto vienādojumu pārveidojam par $2 \cdot y = 30 - 5 \cdot x$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar 5, tad arī vienādojuma kreisajai pusei jādalās ar 5, tas ir, $2 \cdot y$ jādalās ar 5. Skaitlis 2 ar 5 nedalās, tātad y jādalās ar 5.

Ja $y = 5$, tad $2 \cdot 5 = 30 - 5 \cdot x$ jeb $x = 4$;

ja $y = 10$, tad $2 \cdot 10 = 30 - 5 \cdot x$ jeb $x = 2$;

ja $y \geq 15$, tad $x \leq 0$ un tas vairs nav naturāls skaitlis.

Līdz ar to vai nu $x = 4$ un $y = 5$, vai $x = 2$ un $y = 10$.

5. piemērs

Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Vai var būt, ka vienā rindā ierakstīto skaitļu summa ir 2015, vienā kolonnā ierakstīto skaitļu summa ir 2016, bet pārējās rindās un kolonnās visas ierakstīto skaitļu summas dalās ar 3?

Atrisinājums

Nē, tā nevar būt. Apzīmēsim pārējās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas attiecīgi ar r, R, k, K, bet visu tabulā ierakstīto skaitļu summu ar S. Tad visu tabulā ierakstīto skaitļu summa, skaitot pa rindām, ir $S = 2015 + r + R$, bet, skaitot pa kolonnām, tā ir $S = 2016 + k + K$. Tātad $2015 + r + R = 2016 + k + K$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 3 (jo katrs saskaitāmais dalās ar 3), tad ar 3 ir jādalās ar kreisajai pusei, bet tā nav, jo r un R dalās ar 3, bet 2015 – nedalās.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem. Skat arī A. Andžāns "Algebra 10.-12. klasei Profilkursam", II daļa – Rīga, 1998.

Ja vienādojums satur mainīgos $x_1, x_2, \dots, x_n$, tad par tā atrisinājumu sauc skaitļu komplektu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ar šādu īpašību: ievietojot vienādojumā x_1 vietā a_1, x_2 vietā a_2 , ..., x_n vietā a_n, iegūst patiesu skaitlisku vienādību.

Atrisināt vienādojumu nozīmē atrast visus vienādojuma atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu bez atrastajiem nav.

Apskatīsim algebriskus vienādojumus ar veseliem koeficientiem, kuriem atrisinājums jāmeklē veselo vai naturālo skaitļu kopā. Uzdevumos izmantosim ideju:

ja var pierādīt, ka vienādojuma abas puses, dalot ar kādu šim vienādojumam īpaši izvēlētu skaitli, noteikti dod dažādus atlikumus, tad vienādojumam nav atrisinājuma.

Ievēro! Ja vienādojuma abas puses dalās ar kādu skaitli, tad no tā nevar secināt, ka vienādojumam ir atrisinājums veselos skaitļos.

Daži *īpašā skaitļa* izvēles principi

- Izvēlamies tikai pirmskaitļus vai to pakāpes.
- Sākam ar maziem skaitļiem 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11; ... .
- Izvēlamies skaitļus, kas ir vienādojuma koeficientu dalītāji.
- Vienādojumos, kuros parādās skaitļu k-tās pakāpes, izvēlamies skaitļus k^2 un visus pirmskaitļus, kas izsakāmi formā $mk + 1$. Piemēram, vienādojumos, kas saistīti ar skaitļu kubiem, sākotnējie *īpašie* skaitļi ir 9; 7; 13; 19; ... .
- Vienādojumos, kuri satur veselu skaitļu kvadrātus, parasti izdevīgi aplūkot atlikumus, dalot ar 4, 8 vai 16, dažreiz ar 3;
- Jācenšas izvēlēties tādu skaitli, lai, dalot ar to, iespējami daudziem vienādojuma kreisās un labās puses saskaitāmajiem būtu pēc iespējas mazāk dažādu iespējamu vērtību.

Lietojot šo ideju, lietderīgi atcerēties par darbībām ar atlikumiem, kā arī to, kādus atlikumus var dot veselu skaitļu kvadrāti, kubi, ceturtās pakāpes utt.

Piezīme. Vienam vienādojumam var būt vairāki *īpašie* skaitļi un tālāk dotajos piemēros norādītie nav jāuzskata par vienīgajiem vai pašiem labākajiem.

6. piemērs

Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 + y^2 = 2015$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!

Atrisinājums

Naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu 0 vai 1. Tāpēc $x^2 + y^2$, dalot ar 4, var dot tikai atlikumu $0 + 0$, $0 + 1$, $1 + 0$ vai $1 + 1$, tas ir, atlikumu 0, 1 vai 2. Taču skaitlis 2015 dod atlikumu 3, dalot ar 4. Tāpēc dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

7. piemērs

Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $5x^2 - 2y^2 = 4$.

Atrisinājums

Pārrakstām vienādojumu formā $5x^2 = 2y^2 + 4$. Apskatām iegūtā vienādojuma labās puses izteiksmi pēc moduļa 5.

$\boldsymbol{y}$ **(mod 5)**	$\boldsymbol{2y^2 + 4}$ **(mod 5)**
0	$2 \cdot 0^2 + 4 \equiv 4 \pmod 5$
1	$2 \cdot 1^2 + 4 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$
2	$2 \cdot 2^2 + 4 \equiv 12 \equiv 2 \pmod 5$
3	$2 \cdot 3^2 + 4 \equiv 22 \equiv 2 \pmod 5$
4	$2 \cdot 4^2 + 4 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 5$

Esam ieguvuši, ka $2y^2 + 4$ nekad nedalās ar 5, bet $5x^2$ vienmēr dalās ar 5. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

8. piemērs
Pierādīt, ka vienādojumam $(x-y)^2 = 6xy + 7$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos!
1. atrisinājums
Pārveidojam doto vienādojumu formā $x^2 + y^2 = 8xy + 7$. Gan x^2, gan y^2 pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0 un 1, tāpēc vienādojuma kreisā puse pēc moduļa 4 var pieņemt tikai vērtības 0, 1 vai 2, bet $8xy + 7 \equiv 3 \pmod{4}$. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.
2. atrisinājums
Ekvivalenti pārveidojam doto vienādību:
$$x^2 - 2xy + y^2 = 6xy + 7;$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 10xy + 7;$$
$$(x+y)^2 = 10xy + 7.$$
Pēdējās vienādības kreisajā pusē ir skaitļa kvadrāts, kura pēdējais cipars var būt tikai 0; 1; 4; 5; 6; 9, bet vienādības labajā pusē esošā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.
Piezīme. Principā risinājumā tika izmantota kongruence pēc moduļa 10.
3. atrisinājums
Pārveidojam doto vienādību formā $(x+y)^2 = 10xy + 7$ un apskatām to pēc moduļa 5. Veselu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 5 var dot atlikumus 0, 1 vai 4, taču labā puse ir kongruenta ar 2 pēc moduļa 5. Tātad abas vienādības puses nevar būt vienādas, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

9. piemērs
Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $7^x + 8^y = 13^z$.
Atrisinājums
Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 3. Tā kā $7 \equiv 1 \pmod{3}$, $8 \equiv 2 \equiv -1 \pmod{3}$ un $13 \equiv 1 \pmod{3}$, tad iegūstam $1^x + (-1)^y \equiv 1^z\ (mod\ 3)$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

10. piemērs
Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi x, y un z, ka izpildās vienādība $6^x + 13^y = 29^z$.
Atrisinājums
Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 7. Tā kā $6 \equiv -1 \pmod{7}$, $13 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$ un $29 \equiv 1 \pmod{7}$, tad iegūstam $(-1)^x + (-1)^y \equiv 1^z\ (mod\ 7)$. Šī kongruence nav patiesa, jo kreisās puses izteiksmes vērtība ir 0 vai ± 2, bet labās puses izteiksmes vērtība ir 1. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

11. piemērs
Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^2 + 8z = 2y^2 + 3$.
Atrisinājums
Apskatām doto vienādojumu pēc moduļa 8. Viegli pārbaudīt, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4.

$\boldsymbol{a} \pmod{\mathbf{8}}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{a^2} \pmod{\mathbf{8}}$	0	1	4	1	0	1	4	1

Tas nozīmē, ka dotā vienādojuma kreisā puse $x^2 + 8z$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0, 1 vai 4. Savukārt skaitlis $2y^2$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 0 vai 2. Tātad vienādojuma labā puse $2y^2 + 3$, dalot ar 8, var dot tikai atlikumus 3 vai 5. Tātad nav tādu veselu x un y vērtību, pie kurām dotā vienādojuma abas puses dotu vienu un to pašu atlikumu, dalot ar 8. Līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.