Figūru sagriešana un salikšana

Teorija un piemēri, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2025./2026. mācību gadā

Olimpiādes uzdevumu komplektā katrai klašu grupai tiek iekļauts algebras, ģeometrijas, kombinatorikas un skaitļu teorijas uzdevums. Šogad Novada matemātikas olimpiādē ģeometrijas uzdevums 5.-8. klasei būs par tēmu "Figūru sagriešana un salikšana".

Figūru sagriešana

Šāda tipa uzdevumos bieži tiek jautāts: "Vai iespējams sagriezt doto figūru noteiktās mazākās figūrās?" Parasti figūras sastāv no rūtiņām, un mērķis ir pamatot, ka šāda sagriešana vai nu ir, vai nav iespējama.

Iegaumē! Pirmais, ko vienmēr ir vērts darīt, ir mēģināt atrast vienkāršus risinājumus. Uzzīmē lielo figūru, izmēģini dažas sagriešanas iespējas. Šie mēģinājumi bieži palīdz saprast, vai sadalījums ir iespējams, un, ja nav, tad kādu īpašību vajadzētu pētīt tālāk (piemēram, krāsu sadalījumu, malu skaitu vai leņķu sakritību).

Kā pierādīt, ka sagriešana nav iespējama

1. Rūtiņu skaita pārbaude

Pirmkārt jāpārbauda, vai kopējais rūtiņu skaits lielajā figūrā sakrīt ar visu mazo figūru rūtiņu summu. Ja tie nesakrīt, sagriešana ir neiespējama.

Piemērs. Dots 9×9 rūtiņu kvadrāts. Vai to var sagriezt 20 taisnstūros 4×1 rūtiņas?

Atrisinājums. Lielajā kvadrātā ir $9 \times 9 = 81$ rūtiņa, mazajās figūrās kopā $20 \times 4 = 80$. Tā kā $81 \neq 80$, sagriešana nav iespējama.

Ja figūra ir jāsadala n vienādās daļās, ir jāpārbauda, vai kopējais rūtiņu skaits lielajā figūrā dalās ar n.

2. Krāsošanas metode

Kad rūtiņu skaits sakrīt, bet sadalījums tomēr neizdodas, lieto krāsošanas metodi. Visbiežāk izmantotā metode ir šaha galdiņa krāsošana — rūtiņas pārmaiņus iekrāso melnā un baltā krāsā. Tad pārbauda, cik rūtiņu katrā krāsā aizņems katra mazā figūra un attiecīgi cik rūtiņu katrā krāsā aizņems visas mazās figūras. Ja lielajā figūrā vismaz vienas krāsas rūtiņu skaits nesakrīt, sagriešana nav iespējama.

Piemērs. Vai iespējams šaha galdiņu ar 8×8 rūtiņām, no kura izņemti divi pretējie stūri, sagriezt domino kauliņos (katrs aizņem 2 rūtiņas)?

Atrisinājums. Noņemot divus baltus stūrus, paliek 32 melnas un 30 baltas rūtiņas, bet katrs domino vienmēr pārklāj vienu melnu un vienu baltu rūtiņu. Tātad ar domino šo laukumu sagriezt nevar.

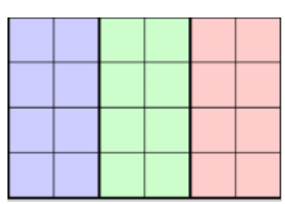
Atkarībā no uzdevuma var krāsot arī pa diagonālēm, pa kolonnām vai izmantot vairāk nekā divas krāsas.

Kā pierādīt, ka sagriešana ir iespējama

Lai pierādītu, ka sagriešana ir iespējama, pietiek parādīt konkrētu konstrukciju — precīzu sagriešanas piemēru.

Piemērs. Vai iespējams 6×4 taisnstūri sadalīt trijās vienādās daļās?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, sadalīšana trijās vienādās 2×4 daļās (skat. 1.att.).



1.att.

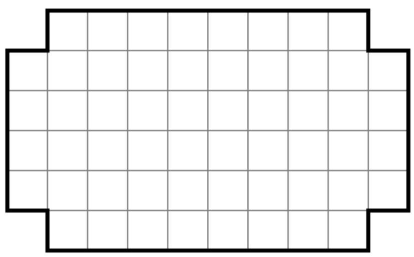
Figūru salikšana

Figūru salikšana jeb noklāšana ir apgriezts process — dotas mazās figūras, un jāsaliek viena lielā.
Šajā gadījumā darbojas tie paši principi kā sagriešanā:

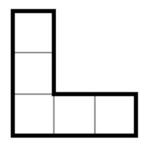
- rūtiņu skaitam jāsakrīt;
- bieži izmanto krāsošanas argumentus, lai pierādītu neiespējamību;
- ja iespējams, jāparāda konkrēts salikšanas piemērs.

Uzdevumu piemēri

1. Parādi, kā no 2.att. dotās rūtiņu lapas var izgriezt desmit figūras, kādas dotas 3.att. (iezīmē, kur jāiet griezuma līnijām)! Figūras var būt arī pagrieztas.

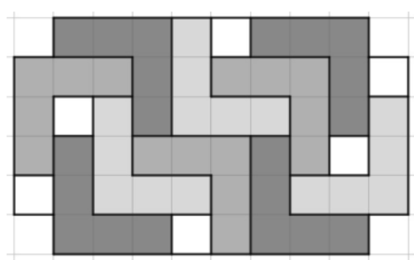


2.att.



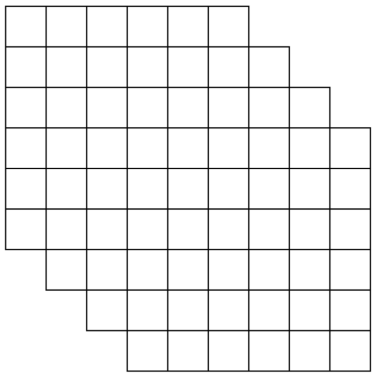
3.att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 4.att..

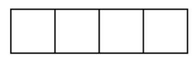


4.att.

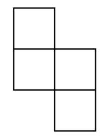
2. Kāds ir lielākais skaits 7.att. doto figūru, ko var izgriezt no 5.att. dotās figūras, ja jābūt izgrieztām arī tieši divām 6.att. figūrām?



5.att.

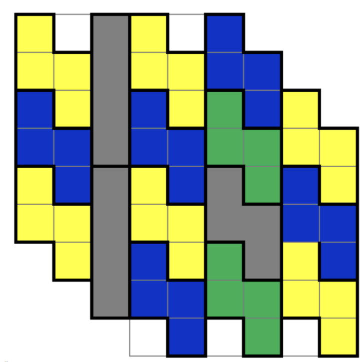


6.att.

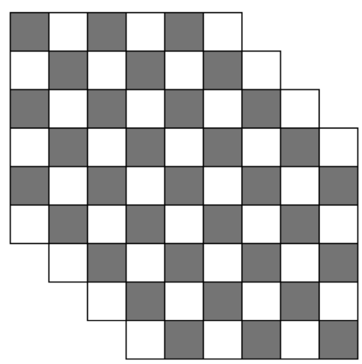


7.att.

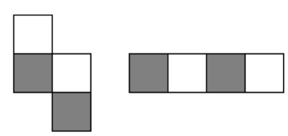
Atrisinājums. Lielākais skaits figūru ir 14, piemēram, skat. 22.att.. Pamatosim, ka vairāk 21.att. figūru nevar izgriezt.
Iekrāsojot 5.att. figūru šaha galdiņa veidā, iegūstam 33 pelēkas rūtiņas un 36 baltas rūtiņas (skat. 9.att.). Lai kā izgrieztu 6.att. un 7.att. dotās figūras, tās vienmēr noklāj tieši 2 pelēkas rūtiņas (skat. 10.att.). Tas nozīmē, ka no 5.att. dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā 16 figūras, jo 17 figūras noklātu jau $17 \cdot 2 = 34$ pelēkās rūtiņas. Tā kā jāizgriež divas 6.att. figūras, tad 7.att. figūras var izgriezt ne vairāk kā 14.



8.att.

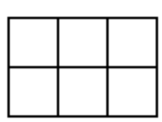


9.att.

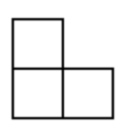


10.att.

3. No 11.att. un 12.att. figūrām, katru izmantojot vismaz vienu reizi, salikt taisnstūri, kurā 12.att. figūras nesaskaras ne ar malu, ne ar stūri! Figūras drīkst pagriezt.

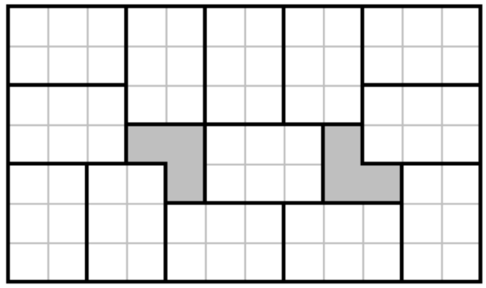


11.att.



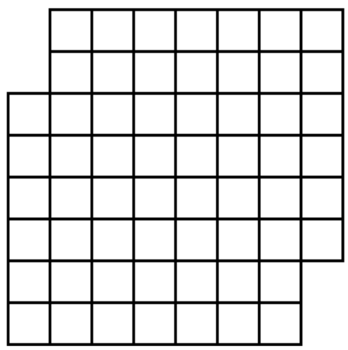
12.att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 13.att..



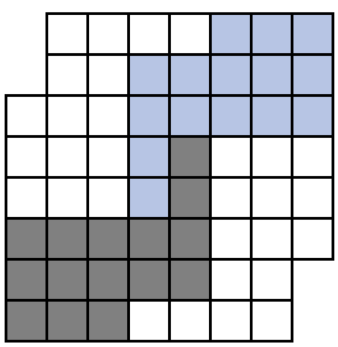
13.att.

4. Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, 14.att. doto figūru var sagriezt 4 vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).

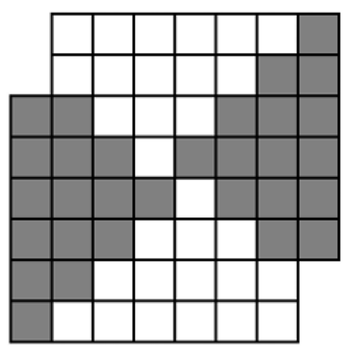


14.att.

Atrisinājums. Skat. 15.att. vai 16.att..

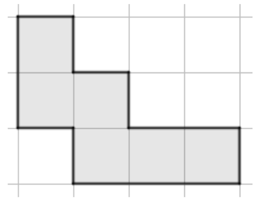


15.att.



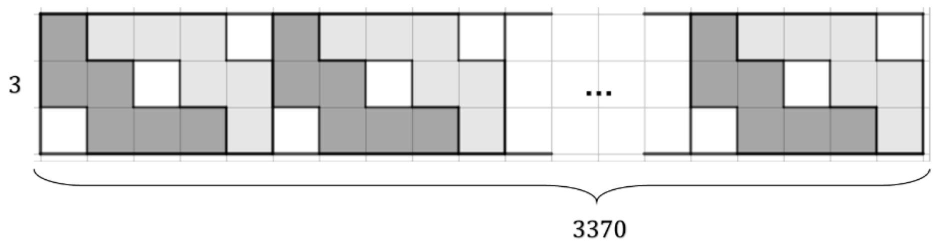
16.att.

5. Vai taisnstūri ar izmēriem 3×3370 rūtiņas var noklāt ar 17.att. redzamām figūrām tā, lai paliktu tieši 2022 nenoklātas rūtiņas? Dotās figūras malām jāiet pa rūtiņu līnijām, tā var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā, figūras nedrīkst pārklāties vai iet ārpus taisnstūra.



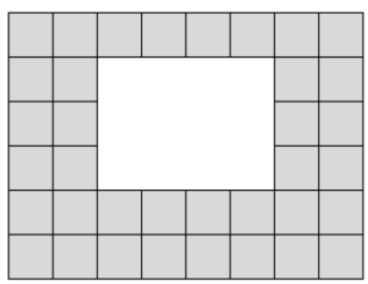
17.att.

Atrisinājums. Jā, var, skat. 18.att.. Tā kā katrā taisnstūrī ar izmēriem 3×5 ir tieši 3 nepārklātas rūtiņas un doto taisnstūri ar izmēriem 3×3370 var sadalīt $3370 : 5 = 674$ šādos taisnstūros, tad nepārklātas paliek tieši $3 \cdot 674 = 2022$ rūtiņas.



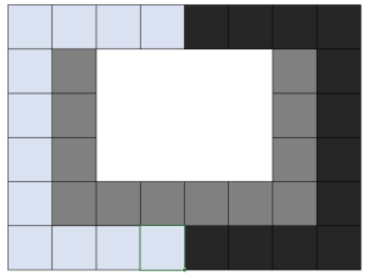
18.att.

6. Parādi, kā 19.att. figūru (6×8 rūtiņu taisnstūris, no kura izgriezts 3×4 rūtiņu taisnstūris), griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt trīs vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



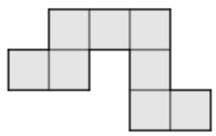
19.att.

Atrisinājums. Skat. 20.att..



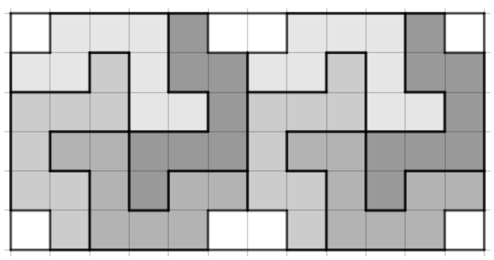
20.att.

7. Vai no taisnstūra ar izmēriem 6×12 rūtiņas var izgriezt astoņas 21.att. redzamās figūras?



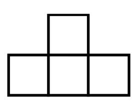
21.att.

Atrisinājums. Jā, piemēram, skat. 22.att..



22.att.

8. Vai taisnstūri ar izmēriem a) 5×6, b) 4×8, c) 4×11 rūtiņas var noklāt ar 23.att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.



23.att.

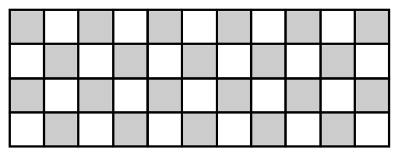
Atrisinājums.

a) Nē, nevar. Ievērojam, ka katra mazā figūra satur 4 rūtiņas. Dotajā 5×6 rūtiņu taisnstūrī kopā ir 30 rūtiņas. Tā kā 30 nedalās ar 4, tad taisnstūri nevar noklāt.

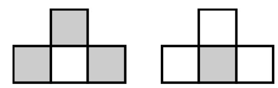
b) Jā, var, skat. 24.att..

c) Nē, nevar. Taisnstūrī kopā ir 44 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 11 figūrām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā (skat. 25.att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 22 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūra, tā noklāj vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 26.att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 11 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli — melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.

24.att.



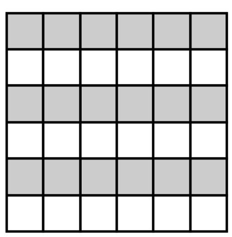
25.att.



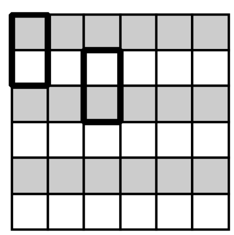
26.att.

9. Vai kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas var pārklāt ar 18 domino kauliņiem tā, lai 13 kauliņi atrastos horizontāli, bet 5 — vertikāli? Katrs kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas, kauliņi nedrīkst pārklāties.

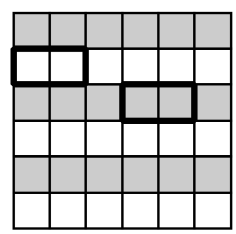
Atrisinājums. Nē, prasīto nevar izdarīt. Iekrāsosim doto kvadrātu joslās (skat. 27.att.). Tad kvadrātā ir 18 melnas un 18 baltas rūtiņas.



27.att.



28.att.



29.att.

Vispirms izvietosim 5 vertikālos kauliņus. Lai kur katru no tiem novietotu, vienmēr tiks noklātas divas blakus rindu rūtiņas, tātad viena melna, viena balta (skat. 28.att.). Pēc piecu vertikālo kauliņu novietošanas būs noklātas 5 melnas un 5 baltas rūtiņas. Nenoklātas paliek 13 melnas un 13 baltas rūtiņas.
Ar vienu horizontālu kauliņu var noklāt vai nu 2 baltas, vai 2 melnas rūtiņas, tas ir, pāra skaita melnas vai pāra skaita baltas (skat. 29.att.). Tātad ar 13 horizontālajiem kauliņiem var noklāt tikai pāra skaita melnas un pāra skaita baltas rūtiņas. Iegūta pretruna, jo pēc vertikālo kauliņu novietošanas vēl ir jānoklāj nepāra skaits melnās un nepāra skaits baltās rūtiņas.